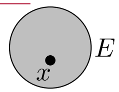
Chapitre 2

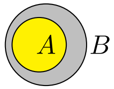
Ensembles et Dénombrement (rappels)

I Vocabulaire des ensembles et des applications

I-1 Ensembles



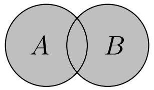
■ *Élément / appartenance :* Quand x est dans l'ensemble E, on note $x \in E$. On dit que x est un *élément* de E ou que x *appartient* à E.



■ *Inclusion :* On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$ si tous les éléments de A sont aussi dans B. On dit également que A est un *sous ensemble* de B.

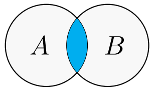
■ *Réunion :* Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E, on appelle *réunion* des ensembles A et B et on note $A \cup B$ l'ensemble contenant tous les éléments de A et B. Ainsi

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

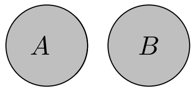


■ *Intersection :* Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E, on appelle *intersection* des ensembles A et B et on note $A \cap B$ l'ensemble ne contenant que les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. Ainsi

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$



■ *Ensembles disjoints / incompatibles :* Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E, on dit qu'ils sont *disjoints* ou *incompatibles* si A et B n'ont aucun élément en commun. On note $A \cap B = \emptyset$.

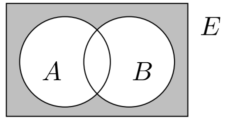


Vocabulaire

Il ne faut pas confondre "disjoints" et "distincts". (Distincts signifiant simplement $A \neq B$.)

■ *Complémentaire :* Si A est un sous ensemble d'un ensemble E, on appelle *complémentaire de A (dans E)* l'ensemble noté A^c ou $\bar{A}$, constitué de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Ainsi, si $x \in E$,

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

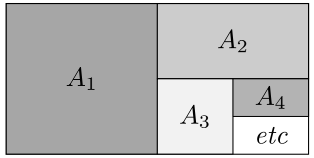


S'il peut y avoir confusion d'ensembles "E", on note plutôt $E \backslash A$ *(pour E privé de A)*. Ainsi,

$$x \in E \backslash A \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$

■ *Partition :* Soit $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille de sous ensembles d'un ensemble E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *partition* de E si et seulement si

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & \text{si } i \neq j, \text{ où } i, j \in I \\ \bigcup_{i \in I} A_i = E & \end{cases}$$

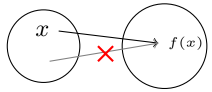


■ *Produit cartésien de n ensembles.* Soit $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une famille de sous ensembles d'un ensemble E. On note $A_1 \times \ldots \times A_n$ l'ensemble formé de tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in A_1, \ \ldots \ , x_n \in A_n$.

I-2 Applications

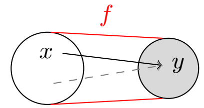
■ *Injection :* On dit qu'une application $f : E \to F$ est *injective* s'il n'existe au maximum qu'un antécédent par f pour chaque élément de F, autrement dit,

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$



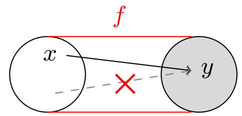
■ *Surjection :* On dit qu'une application $f : E \to F$ est *surjective* s'il existe au minimum un antécédent par f pour chaque élément de F, autrement dit,

$$y \in Y \quad \Rightarrow \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$



■ *Bijection :* On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* s'il existe exactement un antécédent par f pour chaque élément de F, c'est-à-dire que f est injective et surjective. autrement dit,

$$y \in Y \quad \Rightarrow \quad \exists ! x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$



■ *Composée de deux bijections :* Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

■ *Image d'une partie :* Si $f : E \to F$ et $A \subset E$, on note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.

■ *Application réciproque :* Si $f : E \to F$ est une application bijective, on note $f^{-1} : F \to E$ l'unique application telle que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in E$$

II Dénombrement

II-1 Notion de cardinal

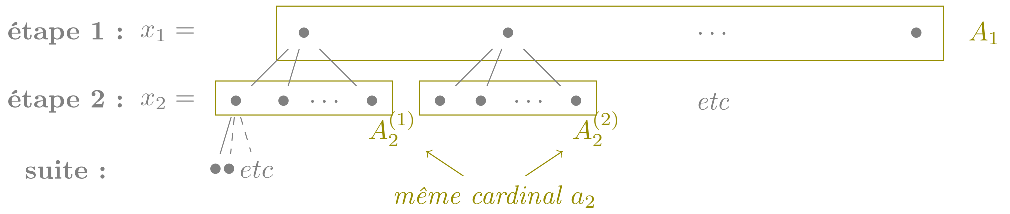
■ *Cardinal :* On appelle *cardinal* d'un ensemble fini E le nombre d'élément contenus dans E. On note ce nombre $\text{card}\,(E)$ ou quelquefois $|E|$.
Dénombrer des cas revient à déterminer le cardinal d'un ensemble.

■ *Cardinal et bijection :* Si E est un ensemble fini et $f : E \to F$ une bijection, alors F est fini et $\text{card}\,(E) = \text{card}\,(F)$.
"Modéliser" une situation signifie "réaliser une bijection avec un ensemble plus simple à dénombrer".

■ *Principe multiplicatif :* Si $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, alors

$$\text{card}\,(A) = \text{card}\,(A_1) \times \text{card}\,(A_2) \times \ldots \text{card}\,(A_n)$$

De manière générale, si les éléments de A peuvent se décomposer comme des n-listes $(x_1, \ldots, x_n)$ liées par exemple à des étapes successives dont les possibilités $A_i^{(j)}$ pour l'étape i fixée sont en nombre identique $(card(A_i^{(1)}) = card(A_i^{(2)}) = \ldots)$



$$\textit{Alors } card\,(A) = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$$

avec $a_1 = card\,(A_1)\,,\ a_2 = card\left(A_2^{(1)}\right) = card\left(A_2^{(2)}\right) = \ldots, a_3 = \ldots.$)

■ *Cardinal de l'ensemble des parties :* Si E est un ensemble fini. On note

$$\mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$$

c'est-à-dire l'ensemble constitué de tous les sous ensembles de E. On a

$$\text{card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n, \quad \text{où } n = \text{card}\,(E)$$

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \underbrace{\{1,2,3\}}_{E}\}$$

On a $n = 3$ éléments dans E et retrouve bien $2^3 = 8$ éléments dans $\mathcal{P}(E)$.

II-2 Formules

■ Nombre d'arrangements : Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leqslant n$, on appelle *nombre d'arrangements de p nombres parmi n* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\left\{(i_1, \ldots, i_p) \mid i_k \in [\![1; n]\!]\ \forall k = 1, \ldots, p \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts }\right\}$$

c'est

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

■ Nombre de permutations : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *nombre de permutations de n éléments* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\left\{(i_1, \ldots, i_n) \mid i_k \in [\![1; n]\!]\ \forall k = 1, \ldots, n \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts}\right\}$$

c'est

$$n!$$

■ Nombre de combinaisons : Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leqslant n$, on appelle *nombre de combinaisons de p nombres parmis n* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\left\{\{i_1, \ldots, i_p\} \mid i_k \in [\![1; n]\!]\ \forall k = 1, \ldots, p \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts}\right\}$$

c'est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

■ Formule du binôme par dénombrement : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} x^k y^{n-k}$$

Démonstration :

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ fois}}$$

Le dévelopement de l'expression de droite par distributivité donne toutes les sommes des monômes du type $x^k y^{n-k}$: lorsqu'on a choisi dans quelle parenthèse prendre les k "x", on prend obligatoirement les "y" dans les $n-k$ parenthèses restantes. Il s'en suit donc que l'on a autant de monômes $x^k y^{n-k}$ que de choix des k "x" possibles dans les n parenthèses, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. □